Hoofdstuk 1

Afspraken en notaties

In deze tekst onderzoeken we een eenvoudig dobbelspel: twee spelers hebben een dobbelsteen, gooien deze, en wie het hoogst aantal ogen gooit wint. Er blijken setjes dobbelstenen te bestaan waarbij geen van de stenen duidelijk het sterkst is in dit spel. Laten we eerst onze notaties vastleggen. Een gewone dobbelsteen noteren we als $A : 1, 2, 3, 4, 5, 6$. De dobbelsteen hoeft geen zes zijvlakken te hebben en ook de cijfers op de zijkanten moeten niet allen verschillend zijn. zo kan je bijvoorbeeld een vijfhoekige dobbelsteen hebben met op de zijvlakken twee enen en drie vieren. We noteren die dan door $B : 1, 1, 4, 4, 4$. We zorgen er dus steeds voor dat we de cijfers op de zijvlakken in oplopende volgorde geven.

Met $w(A, B)$ noteren we de kans dat dobbelsteen A wint van dobbelsteen B. Als $w(A, B) > w(B, A)$ dan zeggen we dat dobbelsteen A *sterker* is dan dobbelsteen B en we noteren $A \longrightarrow B$.

Een *zwendelset* is een setje van dobbelstenen waarbij elke dobbelsteen sterker is dan één of (nog beter) meerdere dobbelstenen. Maar elke dobbelsteen moet ook weer zwakker zijn dan tenminste één andere dobbelsteen in de set.

In een zwendelset kun je altijd ten minste één kringetje van dobbelstenen aanwijzen waarin de één tekens sterker is dan de ander. Voor drie dobbelstenen heb je dan bijvoorbeeld $C \longrightarrow A, A \longrightarrow B, B \longrightarrow C$. Zo een kringetje noemen we een *cykel*.

Hoofdstuk 2

Berekenen van winstkansen

Voorbeeld 1. A is een gewone dobbelsteen waar men één oog bijgetekend heeft bij het zijvlak met twee ogen. B is een gewone dobbelsteen. Bereken $w(A, B)$.

1. We gebruiken de formule van Laplace:

   $$w(A, B) = \frac{\text{het aantal uitkomsten waarbij A wint}}{\text{het totaal aantal uitkomsten}}$$

   Elke dobbelsteen heeft 6 mogelijke uitkomsten, dus zijn er in het totaal 36 mogelijke uitkomsten. A kan een 1 gooien en dan wint hij nooit. Hij kan ook een 3 gooien en dan wint hij als B een 1 of een 2 gooit. Dus 2 mogelijkheden. Als A een 4 gooit wint hij als B een 1,2 of een 3 gooit, dus in 3 gevallen. we werken gelijkaardig als A een 5 of een 6 gooit. Het aantal uitkomsten waarbij A wint is dus $0 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$. Bijgevolg is $w(A, B = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

2. We kunnen dit ook zien in een rooster:

	1	3	3	4	5	6
1	G	A	A	A	A	A
2	B	A	A	A	A	A
3	B	G	G	A	A	A
4	B	B	B	G	A	A
5	B	B	B	B	G	A
6	B	B	B	B	B	G

   Hierbij staat er een A als dobbelsteen A sterker is, B als B sterker is en G als het onbeslist is. We tellen en vinden $w(A, B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ en $w(B, A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$. Dus $A \longrightarrow B$.

3. We kunnen ook gebruik maak van Booleaanse variabelen. Noteer met $A_1, A_2, \cdots, A_6$ de getallen op de zijkanten van dobbelsteen A, dus $A_1 = 1, A_2 = A_3 = 3, A_4 = 4, A_5 = 5, A_6 = 6$. We gebruiken dezelfde notatie voor de getallen op de zijden van dobbelsteen B. Zo is bijvoorbeeld $B_4 = 4$. We definiïeren de Booleaanse variable A_iB_j met $1 \leq i, j \leq 6$ als $A_iB_j = 1$ als het getal op de i-de zijde van dobbelsteen A groter is dan het getal op de j-de zijde van dobbelsteen B. Als dat niet zo is dan is $A_iB_j = 0$. In ons voorbeeld is $A_2B_1 = A_2B_2 = A_3B_1 = A_3B_2 = A_4B_1 = A_4B_2 = A_4B_3 = A_5B_1 = A_5B_2 = A_5B_3 = A_5B_4 = A_6B_1 = A_6B_2 = A_6B_3 = A_6B_4 = A_6B_5 = 1$. Het is duidelijk dat
$$w(A,B) = \frac{A_1B_1 + A_1B_2 + \cdots + A_6B_5 + A_6B_6}{36}$$
In ons voorbeeld is $w(A,B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Voorbeeld 2. A is de dobbelsteen uit voorbeeld 1 en bij B mag je op één van de zijvlakken 1 oog bijtekenen. Waar doe je dat het best?

We rekenen na en de beste keuze is $B : 1, 2, 4, 4, 5, 6$. In dat geval is $w(B,A) = \frac{16}{36} > w(A,B) = \frac{15}{36}$. Dus $B \longrightarrow A$. Met andere woorden B heeft zijn kansen gekeerd en is sterker dan A.

Voorbeeld 3. Is meer altijd beter? Neem de dobbelstenen $T : 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $U : 2, 3, 4, 5, 6, 7$ en $V : 1, 1, 1, 1, 1, 100$. Rogier mag als eerste een dobbelsteen kiezen. Suzanne als tweede. Wat is de beste keuze voor Rogier en als hij de beste keuze neemt , wat is dan de beste keuze voor Suzanne?

We berekenen de kansen (lees de tabel van links naar boven):

	T	U	V
T	$\times$	10/36	25/36
U	21/36	$\times$	30/36
V	6/36	6/36	$\times$

Het is duidelijk dat Rogier best dobbelsteen U neemt omdat die wint tegen beide andere dobbelstenen. Als Rogier dobbelsteen U neemt, dan neemt Suzanne best dobbelsteen T, want de kans dat T tegen U wint is groter dan de kans dat V tegen U wint. Merk op dat de keuze van een groot getal op de zijkant van dobbelsteen V niet betkenet dat V een sterkere dobbelsteen is.

Hoofdstuk 3

Zwendelsets

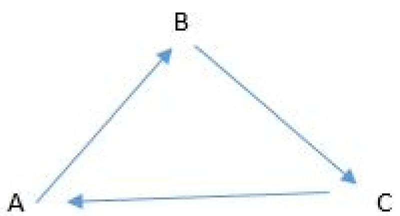
Bij de vorige set van dobbelstenen was het duidelijk welke dobbelsteen de eerste speler moest nemen om zijn winstkans zo groot mogelijk te maken. Maar dit is niet altijd even gemakkelijk, meer nog soms is de tweede speler in het voordeel. Laten we even naar een paar voorbeelden kijken.

Voorbeeld 4. Neem de dobbelstenen $A : 3, 3, 5, 5, 7, 7$ $B : 2, 2, 4, 4, 9, 9$ en $C : 1, 1, 6, 6, 8, 8$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	A	B	C
A	$\times$	$20/36$	$16/36$
B	$16/36$	$\times$	$20/36$
C	$20/36$	$16/36$	$\times$

Omdat elke dobbelsteen van minstens één andere wint, maar ook van minstens één andere verliest is dit setje dobbelstenen een *zwendelset*. We kunnen dit ook weergeven door middel van een graaf. De cykel die ontsaat noteren we als (A, B, C).



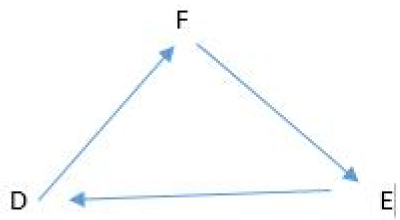
Welke dobbelsteen de eerste speler ook kiest, de tweede speler kan steeds een dobbelsteen nemen met een winstkans van $\frac{20}{36} = 55,5\%$. De tweede speler is dus altijd in het voordeel. Voor de eerste speler is er geen dobbelsteen die *beter* is dan de andere, want voor elke dobbelsteen die de eerste speler kiest is de winstakans voor de tweede speler steeds hetzelfde.

Voorbeeld 5. Neem de dobbelstenen $D : 1, 1, 7, 7, 8, 8$
$E : 2, 2, 3, 3, 9, 9$ en $F : 4, 4, 5, 5, 6, 6$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	D	E	F
D	$\times$	$4/9$	$6/9$
E	$5/9$	$\times$	$3/9$
F	$3/9$	$6/9$	$\times$

Ook dit setje van dobbelstenen is een zwendelset. We hebben als cykel (D, F, E).



In tegenstelling tot het setje $\{A, B, C\}$, is nu de winstkans van de tweede speler afhankelijk van de keuze van de eerste speler. De eerste speler kiest die dobbelsteen met de laagste winstkans voor de tweede speler. Als de eerste speler kiest voor D, dan heeft de tweede speler een winstkans $\frac{5}{9}$ als hij voor dobbelsteen E kiest. Als de eerste speler kiest voor E, dan heeft de tweede speler een winstkans $\frac{6}{9}$ als hij voor dobbelsteen F kiest. Als tenslotte de eerste speler kiest voor F, dan heeft de tweede speler een winstkans $\frac{6}{9}$ als hij voor dobbelsteen D kiest. De eerste speler kiest dus best voor dobbelsteen D want dan is de winstkans van de tweede speler het kleinst.

Voorbeeld 6. Neem de dobbelstenen $K : 1, 1, 3, 5, 5, 6$
$L : 2, 2, 2, 4, 5, 6$ en $M : 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	K	L	M
K	$\times$	16/36	15/36
L	17/36	$\times$	15/36
M	15/36	15/36	$\times$

Dit is geen zwendelset, want L wint van K, maar M speelt gelijk tegen K en L. Dus verliest L van niemand, K wint van niemand en M wint noch verliest van iemand. In de kansentabel van de vorige twee voorbeelden zien we dat de som van de elementen die symmetrisch zijn ten opzichte van de hoofddiagonaal steeds gelijk is aan 1. In dit voorbeeld is dit niet zo. Dit vertaalt zich in volgende eigenschap:

Stelling 3.1. *Voor 2 willekeurge dobbelstenen A en B geldt:*

$$w(A, B) + w(B, A) \leq 1$$

en

$$w(A, B) + w(B, A) = 1 \Longleftrightarrow \text{ er geen gelijkspelen zijn}$$

Bewijs. Noteer met w het aantal keren dat een zijkant van dobbelsteen A groter is dan een zijkant van dobbelsteen B. Noteer met v het aantal keren dat een zijkant van dobbelsteen A kleiner is dan een zijkant van dobbelsteen B. Noteer met g het aantal keren dat een zijkant van dobbelsteen A gelijk is aan een zijkant van dobbelsteen B. Dan is $w(A, B) = \frac{w}{w+v+g}$ en $w(A, B) = \frac{v}{w+v+g}$, dus is $w(A, B) + w(B, A) = \frac{w+v}{w+v+g \leq 1}$. Het is duidelijk dat $w(A, B) + w(B, A) = 1$ als en slechts als $g = 0$ en er dus geen gelijkspelen zijn. Hiermee is het gestelde bewezen. $\square$

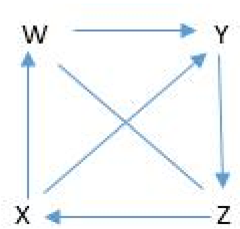
We kunnen uiteraard ook spelen met meer dan 3 dobbelstenen en de dobbelstenen moeten ook niet noodzakelijk 6 zijkanten hebben. Laten we een paar voorbeelden bekijken en de strategie voor de eerste en tweede speler bestuderen.

. **Voorbeeld 7.** Neem de dobbelstenen $W : 1,1,1,5,5,5$ $X : 2,2,2,2,6,6$, $Y : 0,0,4,4,4,4$ en $Z : 3,3,3,3,3,3$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	W	X	Y	Z
W	$\times$	12/36	24/36	18/36
X	24/36	$\times$	20/36	12/36
Y	12/36	16/36	$\times$	24/16
Z	18/36	24/36	12/36	$\times$

De bijbehorende graaf is gegeven in onderstaande tekening. De verbinding tussen W en Z heeft geen pijl, wat betekent dat de kans dat W wint van X even groot is dan omgekeerd. W is dus niet sterker dan Z en Z is ook niet sterker dan W.



Dit is een zwendelset met een 4-cykel (W, Y, Z, X) en een 3-cykel (X, Y, Z). Welke dobbelsteen moet de eerste speler nu nemen? Deze waarvoor de winstkans van de tweede speler het kleinst is. Voor dit setje maakt het niet uit, want de tweede speler heeft, als hij of zij verstandig speelt, altijd een kans van $\frac{24}{36} = 66,7\%$ om te winnen. DE tweede speler is altijd in het voordeel.

De dobbelstenen moeten ook niet allemaal even veel zijkanten hebben.

Voorbeeld 8. Neem de dobbelstenen $Q : 3, 3, 6$
$R : 2, 2, 5, 5$, $S : 1, 4, 4, 4, 4$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

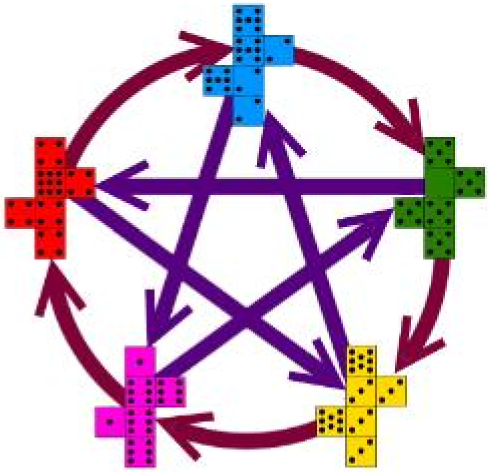
	Q	R	S
Q	$\times$	8/12	7/15
R	4/12	$\times$	12/20
S	8/15	8/20	$\times$

Dit is een zwendelset met een 3-cykel (Q, R, S). Speler 1 neemt best dobbelsteen Q want dan is de winstkans van speler 2 (als die slim speelt) slechts $\frac{8}{15}$. Voor de andere dobbelstenen zou dat iets hoger liggen: $\frac{9}{15}$ voor S en $\frac{10}{15}$ voor dobbelsteen R.

Voorbeeld 9. Neem de dobbelstenen $A : 2, 2, 2, 7, 7, 7$,
$B : 1, 1, 6, 6, 6, 6$, $C : 0, 5, 5, 5, 5, 5$, $D : 4, 4, 4, 4, 4, 9$ en
$E : 3, 3, 3, 3, 8, 8,$. Bereken de onderlinge winstkansen en analyseer dit setje van dobbelstenen.

De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	A	B	C	D	E
A	$\times$	24/36	21/36	15/36	12/36
B	12/36	$\times$	26/36	20/36	12/36
C	15/36	10/36	$\times$	25/36	20/36
D	21/36	16/36	11/36	$\times$	26/36
E	24/36	24/36	16/36	10/36	$\times$



Er zijn twee 5-cykels: (A, C, E, B, D) en (A, B, C, D, E) en vijf 3-cykels: (A, C, E),(C, E, B),(E, B, D),(B, D, A) en (D, A, C). Speler 1 kiest best dobbelsteen dobbelsteen A of B want dan is de grootste winstkans van speler 2 gelijk aan $\frac{2}{3}$.

Besluiten we met een stelling die het bestaan van een cykel bij een zwendelset verzekert.

Stelling 3.2. *Elke zwendelsetmet een eindig aantal dobbelstenen heeft steeds een cykel.*

Bewijs. Stel dat dobbelsteen A wint van dobbelsteen B. Dan kan B niet winnen van A en dus wint B van een andere dobbelsteen C. Bij een zwnedelset wint elke dobbelsteen van een andere, dus C moet zeker een keer winnen, Het kan niet tegen B. Als C wint van A dan hebben we een cykel (A, B, C) en is de stelling bewezen. Anders wint C van een andere dobbelsteen D. Ofwel wint D van A of B en is de stelling bewezen ofwel wint D van een dobbelsteen E. We kunnen zo verder gaan maar uiteindelijk zal het stoppen want er zijn een eindig aantal dobbelstenen in de zwendelset. Dus is er steeds een cykel. $\square$

Stel dat A,B en C een cykel vormen, dan hebben we telkens gerekend met de winstkansen $w(A, B), w(B, C)$ en $w(C, A)$. Die kansen zijn uiteraard elk ≤ 1. Kunnen ze alle drie 1 zijn? Of is er een grens?

Stelling 3.3. $w(A,B) + w(B,C) + w(C,A) \leq 2$

Bewijs. We stellen eerst en vooral vast dat A_iB_j, B_jC_k en C_kA_i nooit alle 1 kunnen zijn, want dan zou $A_i > B_j$, $B_j > C_k$ en $C_k > A_i$ en dit kan niet want de relatie ... is groter dan ... is transitief. Verder weten we al dat

$$w(A,B) = \frac{A_1B_1 + A_1B_2 + \cdots + A_6B_5 + A_6B_6}{36}$$

Nu is de som van 216 keer 3 termen $(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1)+(A_1B_1+B_1C_2+C_2A_1)+\cdots+(A_6B_6+B_6C_6+C_6A_6 = 216(w(A,B)+w(B,C)+w(C,A))$. Elke som van 3 termen in het linkerlid is kleiner of gelijk aan 2, wegens de eerste opmerking in dit bewijs. Dus $216(w(A,B) + w(B,C) + w(C,A)) \leq 216.2$. Hieruit volgt het gestelde. □

Hoofdstuk 4

Strategisch spelen

- Veronderstel nu dat er verschillende zwendelsets van dobbelstenen beschikbaar zijn. Dan moeten we twee keuzes maken: het setje en de eerste dobbelsteen. Laat ons dan even volgende problemen bespreken:

  – Welke setje moet de eerste speler dan best kiezen als hij zelf de eerste dobbelsteen moet gooien?

    Hij kiest dan best het setje waar hij een dobbelsteen kan kiezen waarvoor de winstakans van de tweede speler het laagst is. Van de zwendelsets uit voorbeelden 4,5,7 en 8 kan de eerste speler best setje (Q, R, S) nemen. Omdat hij zelf de eerste dobbelsteen mag kiezen , neemt hij dan Q. De kans dat de tweede speler wint is dan $\frac{8}{15} = 53,3\%$.

  – Welke setje moet de tweede speler dan best kiezen als de eerste speler de eerste dobbelsteen moet gooien?

    De tweede speler moet uiteraard zijn of haar kansen zo hoog mogelijk maken. Dus moet hij kiezen voor een setje waarvoor de optimale keuze van de eerste speler toch een zo groot mogelijke kans oplevert voor hem. Dan kiest hij dus best setje (W, X, Y, Z), want dan zal hij voor om't even welke keuze van speler één toch steeds een winstkans hebben van $\frac{6}{9} = 66,7\%$.

- Veronderstel dat je een setje hebt en je bent niet eerst aan de beurt. De eerste speler kiest dan uiteraard voor die dobbelsteen waar jij de kleinste winstkans tegen hebt. Kan jij het gegeven setje zo manipuleren dat jij, als tweede speler, de grootst mogelijk kans hebt om te winnen. Neem bijvoorbeeld het setje $G : 1, 4, 4$, $H : 3, 3, 3$ en $I : 2, 2, 5$.

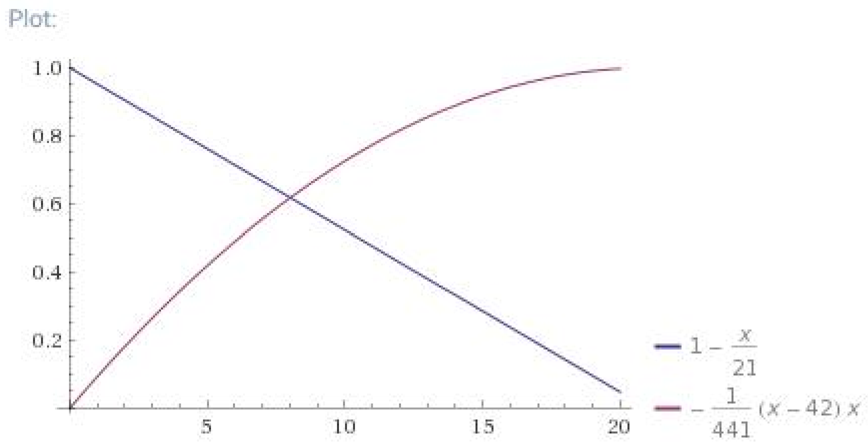
De kansen zijn gegeven in volgende tabel:

	G	H	I
G	$\times$	$6/9$	$4/9$
H	$3/9$	$\times$	$6/9$
I	$5/9$	$3/9$	$\times$

Met deze dobbelstenen zal de eerste speler kiezen om te spelen met dobbelsteen G, want dan heb jij een winstkans van $\frac{5}{9}$, terwijl bij een andere keuze van de eerste speler, je steeds een winstkans had van $\frac{6}{9}$. Je gaat nu het aantal zijden van de dobbelsteen verhogen en ze opvullen met aantallen ogen in dezelfde verhouding als het begin. Stel je gaat een dobbelsteen maken met 21 zijden. Dan neem je voor dobbelsteen H 21 drieën. Op dobbelsteen G neem je n enen en $21-n$ vieren. Op dobbelsteen I neem je tenslotte n vijven en $21-n$ tweeën. Nu is

$$\begin{aligned} w(G,H) &= \frac{21(21-n)}{21^2} = 1 - \frac{n}{21} \\ w(H,I) &= \frac{21(21-n)}{21^2} = 1 - \frac{n}{21} \\ w(I,G) &= \frac{n(21-n)+21n}{21^2} = \frac{42n-n^2}{21^2}. \end{aligned}$$

We willen dat de kleinste van deze kansen zo groot mogelijk is. Omdat $w(G,H) = w(H,I)$ hebben we dus slechts met twee kansen rekening te houden. Op de onderstaande grafiek zien we dat dit gebeurt bij het snijpunt van de twee grafieken.

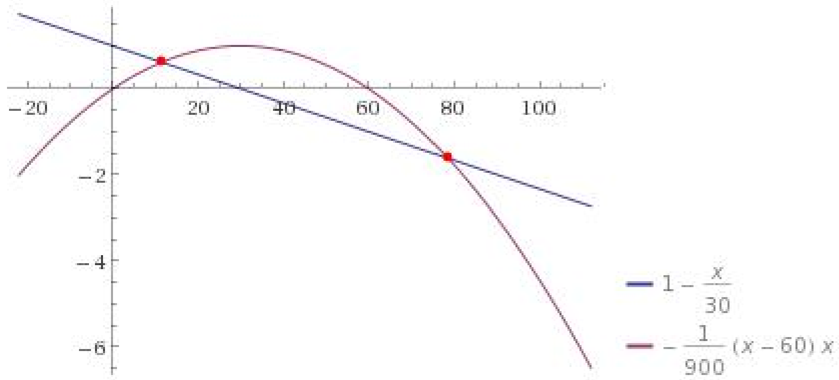


We vinden als snijpunt $n \approx 8.0213$. Voor $n = 8$ vinden we als kleinste kans 0.61678 , voor $n = 9$ vinden we als kleinste kans 0.5714. Als zwendelset nemen we dus deze met $n = 8$

- We proberen dit nog eens met een 30-zijdige dobbelsteen. We zien dat:

$$\begin{aligned} w(G,H) &= \frac{30(30-n)}{30^2} = 1 - \frac{n}{30} \\ w(H,I) &= \frac{30(30-n)}{30^2} = 1 - \frac{n}{30} \\ w(I,G) &= \frac{n(30-n)+30n}{30^2} = \frac{60n-n^2}{30^2}. \end{aligned}$$

Het snijpunt van de grafieken ligt nu ongeveer bij $n \approx 11,459$.



Voor $n = 11$ vinden we als kleinste kans 0.5988 , voor $n = 9$ vinden we als kleinste kans 0.6. We kiezen hier dan voor een zwendelset met $n = 12$.

- Een 30-zijdige dobbelsteen is dus minder goed dan een 21-zijdige omdat de kleinste winstkans bij de 21-zijdige 61,679% bedraagt en dat is hoger dan bij de 30-zijdige waar die kans 60% is. Maar kan je nog beter? Neem een x-zijdige dobbelsteen. De kansen zijn nu:

$$\begin{aligned} w(G,H) &= \frac{x(x-n)}{x^2} = 1 - \frac{n}{x} \\ w(H,I) &= \frac{x(x-n)}{x^2} = 1 - \frac{n}{x} \\ w(I,G) &= \frac{n(x-n)+xn}{x^2} = \frac{2xn-n^2}{x^2}. \end{aligned}$$

In navolging van de vorige voorbeelden, bepalen we het eerste snijpunt van de rechte $y = 1 - \frac{n}{x}$ met de parabool $y = \frac{2xn-n^2}{x^2}$. Merk op dat onafhankelijk veranderlijke n is en niet x. Uit $1 - \frac{n}{x} = \frac{2xn-n^2}{x^2}$ volgt dat $n^2 - 3nx + x^2 = 0$. De kleinste oplossing hiervan is $n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}x$.We maken een tabel met in de eerste kolom de waarden van x, in de tweede kolom de de n-waarde van het snijpunt en in de derde kolom met LG en RG de winstkansen in de natuurlijke waarden van n links en rechts van het snijpunt.

x	n	LG	RG	x	n	LG	RG
5	1,91	0,36	0,60	18	6,88	0,55	0,61
6	2,29	0,55	0,50	19	7,26	0,60	0,58
7	2,67	0,49	1,57	20	7,64	0,58	0,60
8	3,05	0,60	0,50	21	8,61	0,62	0,57
9	3,43	0,55	0,55	22	8,40	0,29	0,59
10	3,82	0,51	0,60	23	8,78	0,57	0,61
11	4,20	0,59	0,55	24	9,17	0,61	0,58
12	4,58	0,55	0,58	25	9,55	0,59	0,60
13	4,96	0,52	0,61	26	9,93	0,55	0,62
14	5,35	0,59	0,57	27	10,31	0,60	0,59
15	5,73	0,55	0,60	28	10,69	0,58	0,61
16	6,11	0,60	0,56	29	11,07	0,61	0,58
17	6,49	0,58	0,59	30	11,46	0,59	0,60

Het onderzoek wijst uit dat een 21-zijdige of 26-zijdige dobbelsteen het best is. Maar eigenlijk is er niet echt veel verschil.

Hoofdstuk 5

Speciale dobbelstenen

- Bekijk de verzameling Λ van alle zeszijdige dobbelstenen waarvan de zijden enkel de cijfers $1, 2, 3, 4,$ of 6 bevatten. Enkele voorbeelden: $(1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 2, 4, 6, 6), (1, 2, 3, 5, 5, 5), (1, 1, 1, 1, 1, 1), \cdots$. We noteren de dobbelsteen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ door O.

Stelling 5.1. *Voor elke dobbelsteen A uit Λ geldt:*
$w(O, A) = \frac{ogensom\ (A)-6}{36}$ *en* $w(A, O) = \frac{36-\ ogensom\ (A)}{36}$.

Bewijs. Stel $A : a, b, c, d, e, f$. Dan is $a-1$ het aantal elementen kleiner dan a in O. Zodat $w(A, O) = \frac{(a-1)+(b-1)+\cdots+(f-1)}{36} = \frac{\text{ogensom }(A)-6}{36}$. Op analoge wijze is $6 - a$ het aantal elementen in O dat groter is dan a. Bijgevolg is $w(O, A) = \frac{(6-a)+(6-b)+\cdots+(6-f)}{36} = \frac{36-\text{ ogensom }(A)}{36}$. Hiermee is het gestelde bewezen. □

Bij dobbelstenen met de ogen $1, 2, 3, \cdots, n-1, n$ wordt die formules veralgemeend tot:

$$w(O, A) = w(O, A) = \frac{\text{ogensom }(A) - n}{n^2}$$

$$w(A, O) = \frac{n^2 - \text{ ogensom }(A)}{n^2}$$

Stelling 5.2. *De dobbelsteen* $O : 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *is neutraal voor alle dobbelstenen met ogensom* 21 *in* Λ *of m.a.w* $\forall A \in \Lambda : w(O, A) = w(A, O)$.

Bewijs. Neem een willekeurig dobbelsteen $A \in \Lambda$ en ogensom $(A) = 21$. Dan is, volgens de formules uit vorige stelling,
$w(O, A) = w(A, O) \iff$ ogensom $(A) - 6 = 36 -$ ogensom (A) of m.a.w als ogensom $(A) = 21$, wat moest bewezen worden. □

- Bestuderen we opnieuw dobbelstenen met ogen $1, 2, \cdots, n$ met som $\frac{n(n+1)}{2}$. We gebruiken een voorbeeld met $n = 5$. Er zijn 12 dergelijke dobbelstenen: $\Lambda = \{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 1, 4, 4, 5), (2, 2, 2, 4, 5), (1, 2, 2, 5, 5), (1, 1, 3, 5, 5), (1, 3, 3, 3, 5), (2, 2, 3, 3, 5), (2, 2, 3, 4, 4), (1, 3, 3, 4, 4), (1, 2, 4, 4, 4), (2, 3, 3, 3, 4), (3, 3, 3, 3, 3)\}$.
Elke dobbelsteen A heeft een *duale* dobbelsteen A^*. De oogaantallen van A^* krijg je door 6 min de oogaantallen van A te doen. Zo is de duale dobbelsteen van $(1, 2, 2, 5, 5)$ de dobbelsteen $(1, 1, 4, 4, 5)$. Het is duidelijk dat de duale dobbelsteen A^* terug in Λ zit, want de ogenaantallen zijn terug $1, 2, 3, 4, 5$ en de ogensom $A^* = 5.6 -($ ogenaantal $(A)) = 15$.

Stelling 5.3. $w(A, B) = w(B^*, A^*)$.

Bewijs. Veronderstel $A = (a, b, c, d, e)$ en $B = (a', b', c', d', e')$. Dan is $B^* = (6 - e', 6 - d', 6 - c', 6 - b', 6 - a')$ en $A^* = (6 - e, 6 - d, 6 - c, 6 - b, 6 - a)$. Als $a' < a$, dan is $6 - a < 6 - a'$, dus correspondeert met elk element kleiner dan a een element kleiner dan $6 - a'$. Hieruit volgt het gestelde. □

Een dobbelsteen A heet zelfduaal als $A = A^*$. Voor twee zelfduale dobbelstenen A en B geldt dan , volgens vorige stelling dat $w(A, B) = w(B, A)$. De zelfduale dobbelstenen in Λ zijn $(3, 3, 3, 3, 3), (1, 2, 3, 4, 5)$, $(1, 1, 3, 5, 5), (1, 3, 3, 3, 5), (2, 2, 3, 4, 4), (2, 3, 3, 3, 4)$.